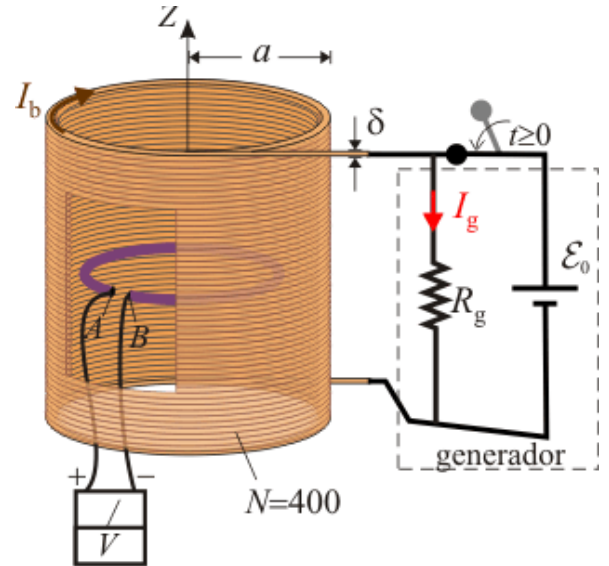


# 1 Enunciado

Un hilo de cobre de sección circular cuyo diámetro es  $\delta = 1 \text{ mm}$ , se enrolla de forma compacta para formar una bobina cilíndrica recta de radio  $a = 18 \text{ mm}$  y 400 espiras, todas ellas perpendiculares al eje de la bobina. Ésta se conecta a un generador caracterizado por una fuerza electromotriz  $\mathcal{E}_0 = 2 \text{ V}$ , con una resistencia interna  $R_g = 10 \Omega$ , conectada en paralelo con el dispositivo f.e.m ideal.

1. Calcule la resistencia eléctrica  $R$  de la bobina y las intensidades  $I_b$  e  $I_g$  de las corrientes estacionarias que se establecen en el sistema. Calcule también la cantidad de calor generada por unidad de tiempo por dichas corrientes.
2. Determine el campo magnético creado por la corriente de la bobina. Obtenga la expresión del coeficiente de autoinducción  $L$  de la bobina en función de los parámetros geométricos del sistema, y calcule el valor de  $L$  para los datos proporcionados.
3. Tras conectar el generador a la bobina, en ésta no se establece la corriente estacionaria  $I_b$  de forma inmediata, sino que verifica un proceso transitorio para  $t \geq 0$ , en el cuál la intensidad varía según la ley exponencial:  $I(t) = I_b (1 - e^{-t/\tau})$ , siendo  $\tau = L / R$ . Obtenga la expresión que describe cómo varía en el tiempo la señal de tensión  $V(t) = V_A - V_B$  que registra un voltímetro conectado, tal como se indica en la figura, a los extremos de una anilla conductora incompleta de radio  $2a / 3$  y que se encuentra en un plano perpendicular al eje de la bobina.
4. En el instante  $t_0 = \tau$ , ¿qué fracción de la potencia suministrada por el generador a la bobina no se disipa en forma de calor? ¿Qué ocurre con la energía no disipada?



Datos:  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ ;  $\rho_{\text{Cu}} = 0.17 \times 10^{-7} \Omega \text{ m}$ .

## 2 Solución

### 2.1 Corrientes estacionarias en el sistema

#### 2.1.1 Resistencia eléctrica de la bobina

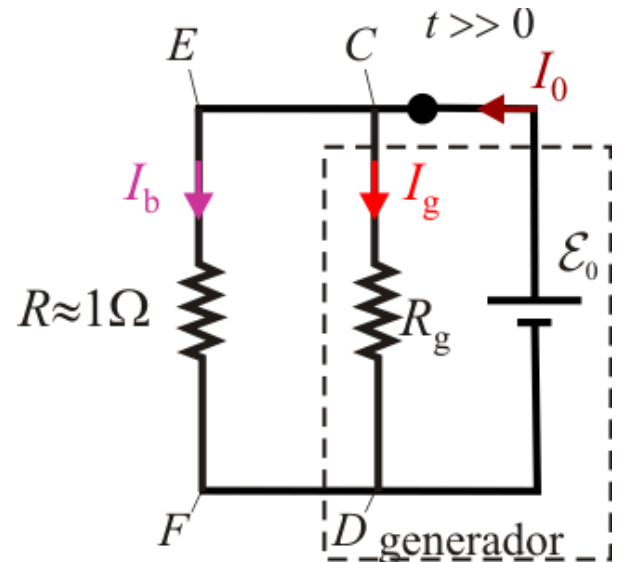
La bobina consiste en un hilo conductor enrollado, formando 400 espiras circulares. Por tanto, su resistencia eléctrica es la de dicho hilo de cobre. Obviamente, es posible aplicar la aproximación de conductor filiforme, de manera que la resistencia eléctrica será proporcional a la longitud total del hilo,  $l$ , e inversamente proporcional a su sección  $S$ ; la constante de proporcionalidad es la resistividad del cobre. Teniendo en

cuenta cómo se relacionan  $l$  y  $S$  con los parámetros geométricos indicados en el enunciado y los valores de éstos, se tiene:

$$R = \rho_{\text{Cu}} \frac{l}{S} = \rho_{\text{Cu}} \frac{2\pi a N}{\pi (\delta/2)^2} \Rightarrow R = \rho_{\text{Cu}} \frac{8 a N}{\delta^2} \approx 1 \Omega$$

### 2.1.2 Intensidades de corrientes estacionarias

Como la bobina tiene una autoinducción  $L$  de valor significativo y, por tanto, no despreciable, se tendrá que una corriente eléctrica  $I_b$  recorriendo dicha bobina, daría lugar a la existencia de un flujo magnético no nulo,  $\Phi_m$  a través de sus  $N$  espiras. Cuando el sistema alcanza el estado estacionario, todas las magnitudes eléctricas y magnéticas son constantes en el tiempo, por lo que no existirá una fuerza electromotriz inducida en el circuito, o una caída de tensión extra en la bobina debida a su autoinducción. En consecuencia, el modelo circuital del sistema en el estado estacionario consiste en la resistencia eléctrica  $R$  del hilo que forma la bobina, conectada a la fuente de potencial fijo que, como se indica en la figura del enunciado, se modela mediante una f.e.m. ideal constante  $\mathcal{E}_0$  con una resistencia  $R_g$  conectada en paralelo.



Obsérvese que la f.e.m. ideal fuerza a que la diferencia de potencial entre los puntos  $C$  y  $D$ , y entre  $E$  y  $F$ , sea  $\mathcal{E}_0$  en ambos casos. Por otra parte, dichas diferencias de potencial deben ser proporcionales a las intensidades de corriente que recorren la bobina ( $I_b$ ), y la resistencia interna del generador ( $I_g$ ). Las constantes de proporcionalidad son las resistencias eléctricas  $R$  y  $R_g$ , respectivamente. Aplicando la segunda ley de Kirchoff, primero en la malla formada por la f.e.m. ideal y la resistencia interna del generador, y luego en la formada por la f.e.m. y la resistencia eléctrica de la bobina, se tendrá:

$$\mathcal{E}_0 = V_C - V_D = R_g I_g \Rightarrow I_g = \frac{\mathcal{E}_0}{R_g} = 0,2 \text{ A}$$

$$\mathcal{E}_0 = V_E - V_F = R I_b \Rightarrow I_b = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \approx 2,0 \text{ A}$$

Si aplicamos la primera ley de Kirchoff en el nodo  $C$  del circuito, obtenemos la intensidad  $I_0$  de la corriente eléctrica total suministrada por la f.e.m. ideal del generador cuando el sistema alcanza el estado estacionario:

$$I_g + I_b + (-I_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad I_0 = I_g + I_b \approx 2,2 \text{ A}$$

### 2.1.3 Potencia disipada

Al considerar el hilo de cobre como medio óhmico y, por tanto, con resistividad y resistencia eléctrica no nula, se tendrá que el paso de una corriente eléctrica estacionaria implica una disipación continua de energía que, por efecto Joule, se transforma en calor. Como se sabe, la cantidad de energía disipada por unidad de tiempo (potencia), en la bobina es proporcional al cuadrado de la intensidad de la corriente que la recorre, siendo la constante de proporcionalidad la resistencia eléctrica del elemento:

$$\left. \frac{dQ}{dt} \right|_R = P_{\text{Jou}}|_R = R I_b^2 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{dQ}{dt} \right|_R = P_{\text{Jou}}|_R \approx 4,0 \text{ W}$$

En cuanto a la resistencia interna del generador, se trata de un elemento que permite modelar el hecho de que no toda la energía (de la naturaleza que sea) transformada en la fuente de potencial constante, es suministrada por éste dispositivo en forma de energía eléctrica: parte de esa energía es disipada dentro del propio generador. La resistencia interna del generador es un parámetro  $R_g$  de valor tal que la potencia disipada (energía por unidad de tiempo) en dicho dispositivo, en régimen estacionario, es:

$$P_{\text{dis}}|_{\text{gen}} = R_g I_g^2 \quad \Rightarrow \quad P_{\text{dis}}|_{\text{gen}} = 0,4 \text{ W}$$

Conviene tener presente que la disipación de energía en la resistencia equivalente del generador no va a consistir sólo en la transformación en calor: además de este mecanismo pueden intervenir otros, como la creación de vibraciones, ruido, etc.

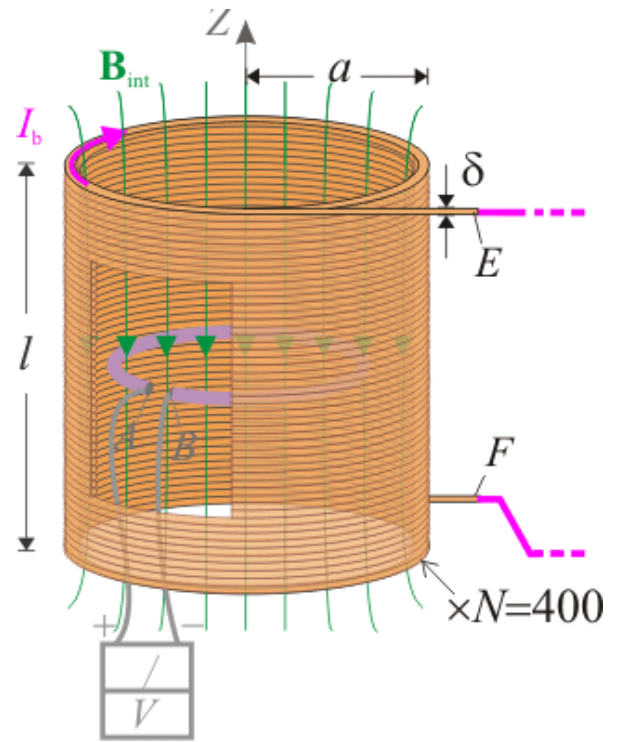
## 2.2 Propiedades magnéticas

### 2.2.1 Campo magnético de corrientes estacionarias

Para calcular el campo magnético creado por la corriente estacionaria de intensidad  $I_b$  que recorre la bobina, ha de seguirse un procedimiento similar al del ejercicio que puede encontrarse en [este enlace](#). En el enunciado se indica que las espiras que conforman la bobina están enrolladas de forma compacta, y puesto que el diámetro del hilo es  $\delta$ , la longitud total  $l$  del solenoide es:

$$l = N \delta = 400 \text{ mm} \gg a$$

Es decir, lo suficientemente grande frente al diámetro de la bobina como para poder considerar la aproximación de bobina larga de sección uniforme, según la cuál el campo magnético es intenso y prácticamente uniforme (constante) en el interior, y nulo en el exterior. Así, tomando como dirección  $OZ$  el eje de la bobina cilíndrica, con el hilo conductor enrollado de manera que la corriente eléctrica recorre la bobina en sentido horario, se tendrá que el campo magnético creado por dicha corriente es:



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \simeq \begin{cases} -\mu_0 n I_b \mathbf{k} = \mathbf{B}_{\text{int}}; & \text{en el interior de la bobina} \\ \mathbf{0}; & \text{en el exterior de la bobina} \end{cases}$$

Obsérvese que el enrollamiento del cable en sentido horario respecto del eje  $OZ$ , tiene como consecuencia que cuando la corriente eléctrica recorre la bobina en dicho sentido, el sentido del campo magnético es opuesto al del dicho eje. Por otra parte, el parámetro  $n$  es la densidad lineal de espiras; es decir, el número total  $N$  dividido por la longitud total  $l$  del solenoide:

$$n = \frac{N}{l} = \frac{1}{\delta} = 10^3 \text{ m}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_{\text{int}} = -B_{\text{int}} \mathbf{k}, \quad \text{con} \quad B_{\text{int}} = \frac{\mu_0 I_b}{\delta} \approx 2,5 \text{ mT}$$

### 2.2.2 Autoinducción de la bobina

Como se sabe, la autoinducción de la bobina  $\Gamma$ , es el parámetro geométrico  $L$  característico de la relación lineal existente entre la intensidad de corriente eléctrica que recorre la bobina y el flujo del campo magnético creado por dicha corriente, a través de una superficie  $\Sigma$  que se apoya en las  $N$  espiras de la bobina:

$$\Phi_m|_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = L I_b$$

Según vimos en el anterior subapartado, sólo contribuirá a dicho flujo el campo magnético uniforme  $\mathbf{B}_{\text{int}}$  que existe en el interior del solenoide. Y como las  $N$  espiras son idénticas, de área  $S = \pi a^2$ , y están situadas en planos paralelos perpendiculares al vector  $\mathbf{k}$ , el flujo total a través de la bobina será (aproximadamente) igual a  $N$  veces

el flujo a través de una de las espiras. Por otra parte, al estar el hilo enrollado en sentido horario, se tendrá que  $d\mathbf{S} = dS (-\mathbf{k})$ , de manera que,

$$\Phi_m]_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \approx N \int_S \mathbf{B}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow \Phi_m]_{\Sigma} \approx N \frac{\mu_0 I_b}{\delta} \int_S dS = \frac{N \mu_0 \pi a^2}{\delta} I_b \Rightarrow$$

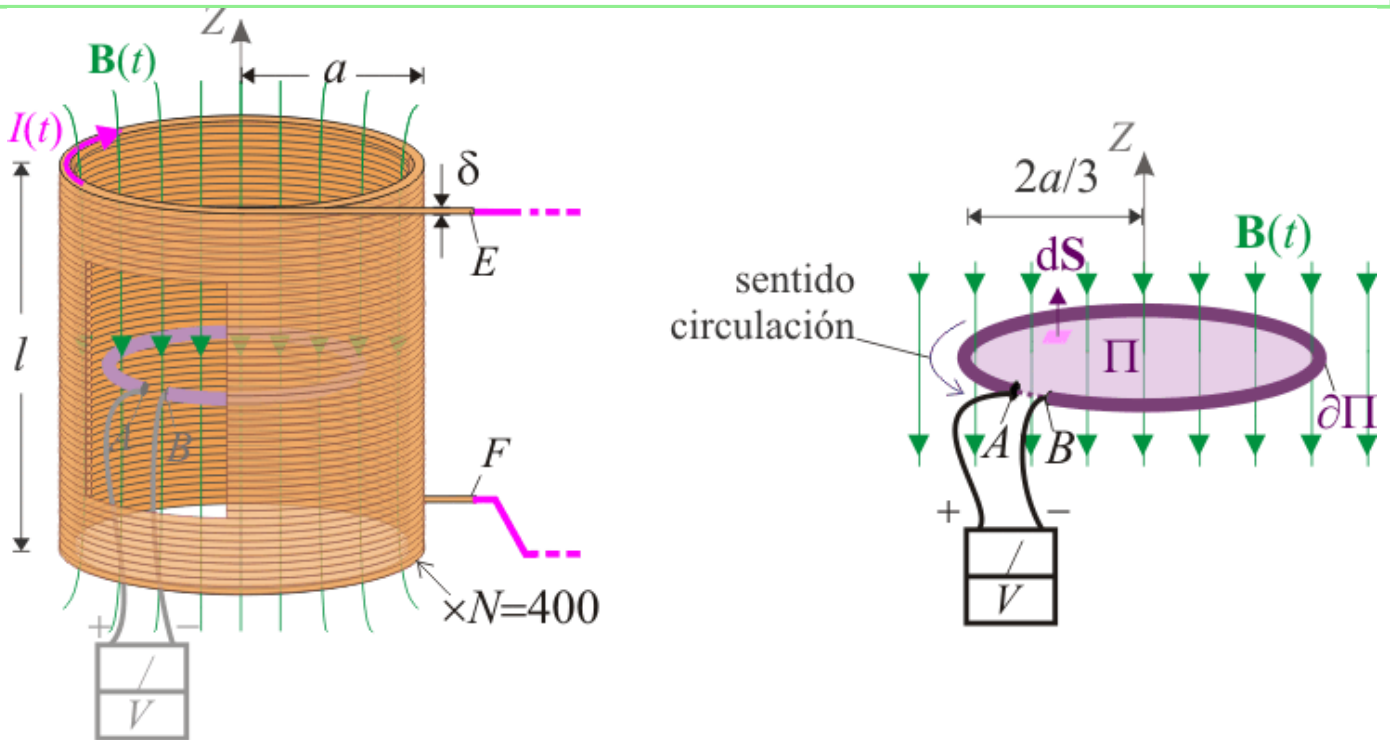
$$L \approx \frac{N \mu_0 \pi a^2}{\delta} \approx 512 \mu\text{H}$$

## 2.3 Tensión en la espira

### 2.3.1 Flujo magnético en la espira

Consideremos que la bobina es recorrida por una corriente eléctrica de intensidad variable en el tiempo,  $I(t)$ . Si esta variación no es muy rápida, lo cual se asume en el sistema bajo estudio, el único efecto significativo es que el campo magnético creado por dicha corriente va a ser despreciable en el exterior de la bobina, y uniforme e intenso en el interior. Es decir, presenta una configuración espacial similar a la del campo creado por la corriente estacionaria, sólo que ahora, el campo en el interior no es constante y presenta la misma variación que la intensidad de la corriente:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; t) \simeq \begin{cases} -\mu_0 n I(t) \mathbf{k} = -\mu_0 n I_b (1 - e^{-t/\tau}) \mathbf{k} = \mathbf{B}(t); & \text{en el interior de la bobina} \\ \mathbf{0}; & \text{en el exterior de la bobina} \end{cases}$$



La espira abierta circular  $\partial\Pi$ , de radio  $2a/3$  y colocada en el interior de la bobina, se encuentra sometida al campo magnético uniforme y variable  $\mathbf{B}(t)$ . El flujo magnético a través de dicha espira se calcula tomando cualquier superficie que se apoye en  $\partial\Pi$ . Habida cuenta de que esta espira se encuentra contenida en un plano horizontal,

perpendicular al eje  $OZ$ , al cuál es paralelo el campo magnético, tomamos como superficie para calcular el flujo al disco  $\Pi$  cuyo borde coincide con la espira:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_m|_{\Pi} = \int_{\Pi} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \\ d\mathbf{S}|_{\Pi} = dS \mathbf{k} \end{array} \right\} \implies \Phi_m|_{\Pi} = -\mu_0 n I(t) \int_{\Pi} dS = -\frac{4a^2 \pi \mu_0 n}{9} I(t) = \Phi_m(t)$$

Obsérvense que la elección del elemento de superficie implica medir flujos magnéticos positivos cuando el campo magnético atraviesa  $\Pi$  en el sentido del eje  $OZ$ ; por tanto la corriente circulando por la bobina en el sentido horario producirá un flujo negativo en la espira abierta.

$$I(t) > 0 \implies \Phi_m|_{\Pi} > 0$$

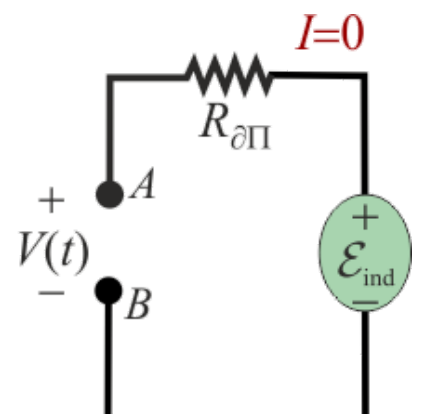
### 2.3.2 Aplicación de la ley de Faraday

Por otra parte, el hecho de que el flujo magnético a través de la espira sea variable en el tiempo, dará lugar a la aparición de una fuerza electromotriz inducida en dicha espira  $\partial\Pi$ . Según las leyes de inducción electromagnética, esta fuerza electromotriz inducida es opuesta a la variación instantánea del flujo magnético:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Pi} = -\frac{d\Phi_m}{dt}\Big|_{\Pi} = \frac{4a^2 \pi \mu_0 n}{9} \frac{dI(t)}{dt} = \frac{4a^2 \pi \mu_0 n}{9\tau} I_b e^{-t/\tau}$$

Teniendo en cuenta la existencia de esta única fuerza electromotriz y que la espira es un medio óhmico que tendrá un (pequeña) resistencia eléctrica,  $R_{\partial\Pi} \approx 0$ , podemos construir un circuito equivalente en el que se deberá cumplir la segunda ley de Kirchoff; es decir, en la malla constituida por la espira  $\partial\Pi$ , la suma de todas las fuerzas electromotrices debe ser igual a la suma de todas las caídas de tensión. Nótese que como la espira está abierta, entre los extremos  $A$  y  $B$  existirá, en general, una caída de tensión que mediremos con el voltímetro colocado de manera que su lectura sea  $V(t) = V_A - V_B$ . Es fundamental tener en cuenta que tanto las caídas de tensión como las f.e.m. se calculan matemáticamente como circulaciones del campo eléctrico, y que el sentido de éstas debe ser compatible con el sentido adoptado para medir el flujo magnético: al tomar  $d\mathbf{S}|_{\Pi}$  en el sentido del eje  $OZ$ , las circulaciones se han de realizar en sentido antihorario.

Con toda esta información, construimos el siguiente circuito equivalente, por el que no puede circular corriente eléctrica al encontrarse abierto. En consecuencia, la ecuación del circuito determina que la señal medida por el voltímetro va a ser exactamente igual a la f.e.m. inducida por la variación del flujo magnético:





$$\left[ \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_j V_j \right]_{\partial\Pi} \longrightarrow \mathcal{E}_{\text{ind}} \Big|_{\partial\Pi} = \underbrace{R_{\partial\Pi} I}_{=0} + V_A - V_B = V(t)$$

$$\Rightarrow V(t) = \frac{4 a^2 \pi \mu_0 n R}{9 L} I_b e^{-t/\tau} = \frac{4 a^2 \pi \mu_0 n}{9 L} \mathcal{E}_0 e^{-t/\tau}$$

Y si expresamos la autoinducción de la bobina en términos de los parámetros aportados como datos en el enunciado, se obtiene que la señal de tensión medida por el voltímetro presenta un comportamiento exponencial decreciente:

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} V_0 \approx \frac{4 \mathcal{E}_0}{9 N} \approx 2,2 \text{ mV} \\ \tau = \frac{L}{R} \approx 0,5 \text{ ms} \end{cases}$$

## 2.4 Balance energético en la bobina

### 2.4.1 Ecuaciones para el estado transitorio

Volvamos a considerar el sistema formado por el generador y la bobina, pero ahora en el régimen transitorio considerado en el apartado anterior. Ahora, el campo magnético variable en el tiempo generado en el interior de la bobina cuando ésta es recorrida por la corriente de intensidad  $I(t) = I_b (1 - e^{-t/\tau})$ , da lugar a un flujo magnético que variable en el tiempo que, en virtud de la ley de Faraday, se traduce en una fuerza electromotriz inducida en la bobina.

Como acabamos de ver, este mismo campo magnético variable inducía una f.e.m. en la espira  $\partial\Pi$ , situada en el interior de la bobina, pero como dicha espira estaba abierta, no la recorría ninguna corriente eléctrica y, por tanto, no modifica el campo magnético  $\mathbf{B}(t)$  calculado en el [subapartado 2.3.1](#). En consecuencia, el flujo magnético a través de las  $N$  espiras de la bobina será proporcional a la intensidad  $I(t)$ , siendo la constante de proporcionalidad la autoinducción  $L$  calculada en [2.2.2](#):

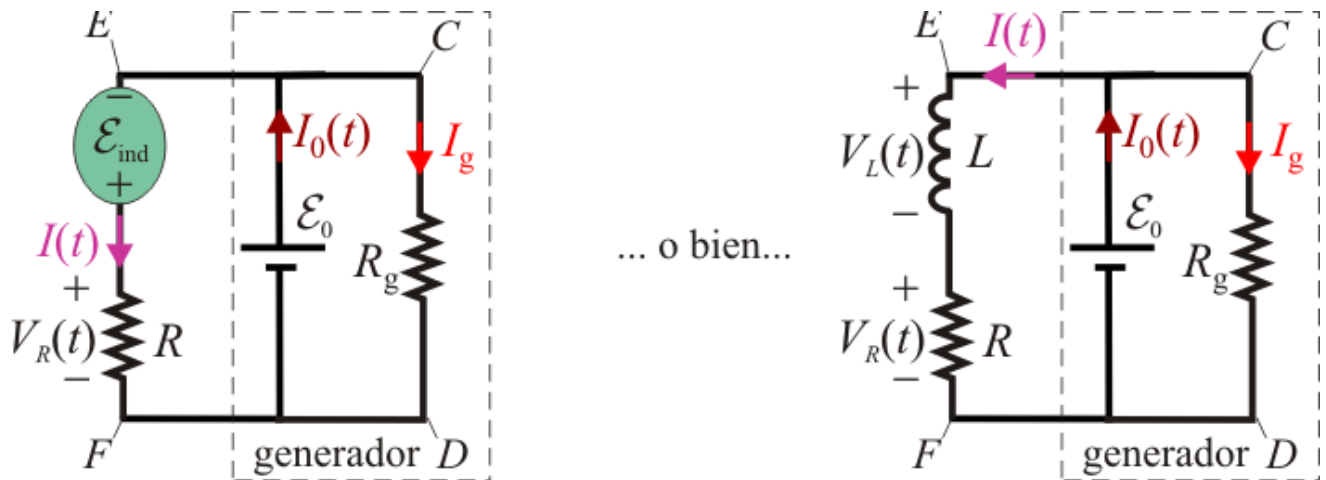
$$\Phi_m \Big|_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} = L I(t)$$

Por tanto, en el proceso transitorio existe una f.e.m. inducida en la bobina cuyo valor es:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} \Big|_{\partial\Sigma} = - \frac{d\Phi_m}{dt} \Big|_{\Sigma} = -L \frac{dI(t)}{dt} = -V_L(t)$$

... y que modifica el circuito equivalente construido en el [subapartado 2.1.2](#) para modelar el sistema formado por la bobina y el generador en el régimen estacionario.

Realmente, sólo se modifica la rama del circuito correspondiente a la bobina, en la que hay que introducir la f.e.m. inducida, de manera que en la malla formada por aquella y por la f.e.m. ideal, se verifique la segunda ley de Kirchoff incluyendo la  $\mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma}$ ... o la caída de tensión  $V_L(t)$  en el elemento llamado autoinducción. Es decir, podemos utilizar cualquiera de los dos modelos siguientes:



... que están caracterizados por idénticas ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma} &= V_R(t) = R I(t) \\ \mathcal{E}_0 &= R_g I_g \end{aligned} \right\} \dots \text{ o bien... } \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= V_L(t) + V_R(t) = L \frac{dI(t)}{dt} + R I(t) \\ \mathcal{E}_0 &= R_g I_g \end{aligned} \right.$$

## 2.4.2 Potencia suministrada y disipada

La potencia instantánea suministrada por el generador a la bobina es igual al producto de la intensidad de la corriente eléctrica que entra en la bobina por la tensión o voltage entre sus extremos  $E$  y  $F$ . Esta potencia en el instante  $t = \tau$  es:

$$P_{\text{sum}}(t = \tau) = (V_E - V_F) I(\tau) = \mathcal{E}_0 I_b(1 - e^{-1})$$

La potencia disipada en la bobina por efecto Joule (en forma de calor), en dicho instante es igual a la resistencia eléctrica de dicho dispositivo, multiplicada por el cuadrado de la intensidad de la corriente eléctrica:

$$P_{\text{Jou}}(t = \tau) = R I^2(\tau) = R I_b^2(1 - e^{-1})^2$$

Por tanto, la fracción de potencia suministrada en el instante  $\tau$  que NO se disipa por efecto Joule en la bobina será:

$$\frac{P_{\text{sum}} - P_{\text{Jou}}}{P_{\text{sum}}}\Bigg|_{t=\tau} = 1 - \frac{R I_b}{\mathcal{E}_0}(1 - e^{-1}) = \frac{1}{e} \approx 0,37 = 37\%$$

## 2.4.3 Energía no disipada



La cantidad de energía suministrada que no se disipa por efecto Joule desde el instante inicial hasta el instante propuesto,  $t = \tau$ , puede calcularse integrando en este intervalo la potencia no disipada. En un instante arbitrario  $t$ , esta potencia no disipada es:

$$P_m(t) = P_{\text{sum}}(t) - P_{\text{Jou}}(t) = \mathcal{E}_0 I(t) - R I^2(t)$$

Pero utilizando las ecuaciones del [subapartado anterior](#), se obtiene que la potencia instantánea no disipada es...

$$P_m(t) = P_{\text{sum}}(t) - P_{\text{Jou}}(t) = L I(t) \frac{dI(t)}{dt} = \frac{L}{2} \frac{d}{dt} [I^2(t)]$$

... y la energía no disipada en el intervalo de tiempo  $(0, \tau)$ :

$$W_m \Big|_{0 \rightarrow \tau} = \int_0^\tau P_m dt = \frac{L}{2} \int_0^\tau d[I^2(t)] \quad \Rightarrow$$

$$W_m \Big|_{0 \rightarrow \tau} = \frac{L}{2} [I^2(\tau) - \underbrace{I^2(0)}_{=0}] = \frac{L}{2} I_b^2 (1 - e^{-1})^2 \approx 406 \mu\text{J}$$

Esta cantidad de energía suministrada y no disipada por efecto Joule, queda almacenada en la bobina, constituyendo el soporte físico del campo magnético  $\mathbf{B}(\tau)$  que hay en el interior de la bobina en el instante  $\tau$ .